Théorie d'Iwasawa

La **théorie d'Iwasawa** peut être vue comme une tentative d'étendre les résultats arithmétiques classiques sur les corps de nombres (extensions *finies* du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels) à des extensions infinies de $\mathbb{Q}$, par des procédés de passage à la limite des extensions finies vers les extensions infinies.

Sommaire

Généralités

Les objets de base de la théorie d'Iwasawa sont les $\mathbb{Z}_p$-extensions ; c'est-à-dire des extensions galoisiennes dont le groupe de Galois est le groupe profini $\mathbb{Z}_p$, pour p un nombre premier fixé. Par la correspondance de Galois, la donnée d'une $\mathbb{Z}_p$-extension est équivalente à celle d'une tour d'extensions $K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots \subset K_\infty$ telle que chaque K_n est galoisienne sur K de groupe de Galois $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

- Pour chaque corps de nombres, une $\mathbb{Z}_p$-extension particulière peut-être construite par adjonction de racines p-ièmes de l'unité : la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.
- Sous la conjecture de Leopoldt, un corps de nombres admet $r_2 + 1$ $\mathbb{Z}_p$-extensions linéairement indépendantes, où r_2 est le nombre de couples de plongements complexes conjugués du corps considéré ; ce qui peut encore s'énoncer en disant que le compositum de toutes ces extensions a pour groupe de Galois $\mathbb{Z}_p^{r_2+1}$.

Théorème fondamental

Le théorème fondateur de la théorie, dû à Iwasawa, porte sur le comportement du groupe des classes le long d'une $\mathbb{Z}_p$-extension. Soit p un nombre premier, K un corps de nombres, et $\bigcup_n K_n$ une $\mathbb{Z}_p$-extension de K. Pour chaque n, on s'intéresse au cardinal du p-Sylow du groupe des classes de K_n ; notons le p^{e_n}. Alors, il existe des entiers μ, λ (positifs), ν (de signe quelconque), tels que pour n assez grand, on ait :

$$e_n = \mu p^n + \lambda n + \nu$$

Idée de la démonstration

Notons $A(K_n)$ le p-Sylow du groupe des classes du corps K_n. Par la théorie du corps de classes, il existe une extension L_n de K_n tel que $A(K_n) \simeq Gal(L_n/K_n)$: L_n est la p-extension abélienne non ramifiée maximale de K_n. L'union des corps L_n fournit alors un corps L, qui est la pro-p- extension abélienne non ramifiée maximale de K_∞.

On considère alors le groupe de Galois $X = Gal(L/K_\infty)$:

- X est la limite projective des groupes $Gal(L_n/K_n)$, qui apparaissent comme des quotients de X.
- X en tant que pro-p-groupe abélien a une structure naturelle de $\mathbb{Z}_p$-module.
- Par ailleurs, le groupe de Galois de l'extension cyclotomique $Gal(K_\infty/K)$ agit sur X, dont on peut montrer qu'il est ainsi muni d'une structure de $\mathbb{Z}_p[[T]]$-module, c'est-à-dire de module d'Iwasawa.

L'investigation de la structure des modules d'Iwasawa relève de l'algèbre linéaire. Connaissant leur classification à pseudo-isomorphisme près, et ayant calculé par quel sous-groupe on quotiente X pour obtenir $Gal(L_n/K_n)$, on peut en déduire l'estimation asymptotique du cardinal de ces groupes, qui fournit la formule annoncée sur $A(K^n)$.

Quelques résultats et conjectures

- L'invariant μ est nul pour la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique au-dessus d'une extension abélienne de $\mathbb{Q}$ (théorème de Ferrero-Washington). Des exemples sont connus d'autres extensions où il n'est pas nul.
- L'invariant λ est connu par exemple pour les corps quadratiques imaginaires, par la formule de Kida. Il est conjecturé qu'il est nul pour les corps totalement réels, c'est la conjecture de Greenberg.
- La structure de module d'Iwasawa du groupe $X = Gal(L/K_\infty)$ est relié dans certains cas à certaines fonctions L p-adiques **(en)**, par la conjecture principale en théorie d'Iwasawa, démontrée pour $\mathbb{Q}$ par Mazur et Wiles en 1984[1], puis pour tout corps de nombres totalement réel par Wiles en 1990[2]. Leurs techniques s'inspiraient de celles utilisées par Ken Ribet dans sa preuve du théorème de Herbrand-Ribet. Karl Rubin **(de)** a démontré d'autres généralisations de la conjecture pour les corps quadratiques imaginaires[3]. Plus récemment, s'inspirant de la méthode de Ribet, Chris Skinner et Éric Urban ont annoncé une preuve de la conjecture principale pour GL(2)[4].

Développements

Le développement des idées d'Iwasawa peut se faire selon plusieurs axes :

- on considère le comportement le long des étages d'une $\mathbb{Z}_p$-extension d'autres objets que le groupe de classes, notamment du groupe de Mordell-Weil d'une courbe elliptique. On parle de théorie d'Iwasawa des courbes elliptiques.
- on considère le comportement des objets arithmétiques non plus le long d'une $\mathbb{Z}_p$-extension, mais dans des extensions infinies ayant d'autres groupes de Galois : par exemple $\mathbb{Z}_p^d$, ou plus généralement un groupe analytique p-adique. Se développe ainsi une théorie d'Iwasawa non commutative, notamment sous l'impulsion de John Coates.

Notes et références

Notes

1. **(en)** B. Mazur et A. Wiles, « Class fields of abelian extensions of **Q** », *Inventiones*

Mathematicae, vol. 76, nº 2, 1984, p. 179–330 (lire en ligne (http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=742853))
2. **(en)** A. Wiles, « The Iwasawa Conjecture for Totally Real Fields », *Annals of Mathematics*, vol. 131, nº 3, 1990, p. 493–540 (DOI 10.2307/1971468 (http://dx.doi.org/10.2307/1971468))
3. **(en)** K. Rubin, « The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields », *Inventiones Mathematicae*, vol. 103, nº 1, 1991, p. 25–68 (DOI 10.1007/BF01239508 (http://dx.doi.org/10.1007/BF01239508))
4. **(en)** C. Skinner et É. Urban, *The Iwasawa main conjectures for GL_2*, preprint (http://www.math.columbia.edu/~urban/eurp/MC.pdf) (2010).

Références

- **(en)** Cet article est partiellement ou en totalité issu de l'article de Wikipédia en anglais intitulé « Iwasawa theory (https://en.wikipedia.org/wiki/Iwasawa_theory?oldid=422931301) » (voir la liste des auteurs (https://en.wikipedia.org/wiki/Iwasawa_theory?action=history)).
- **(en)** Lawrence C. Washington **(de)**, *Introduction to Cyclotomic Fields* [détail des éditions]

Ce document provient de « http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Théorie_d%27Iwasawa&oldid=96962078 ».

Dernière modification de cette page le 24 septembre 2013 à 09:02.
Droit d'auteur : les textes sont disponibles sous licence Creative Commons paternité partage à l'identique ; d'autres conditions peuvent s'appliquer. Voyez les conditions d'utilisation pour plus de détails, ainsi que les crédits graphiques. En cas de réutilisation des textes de cette page, voyez comment citer les auteurs et mentionner la licence.
Wikipedia® est une marque déposée de la Wikimedia Foundation, Inc., organisation de bienfaisance régie par le paragraphe 501(c)(3) du code fiscal des États-Unis.