WIKIPÉDIA

Développement décimal

En mathématiques, le **développement décimal** est une façon d'écrire des nombres réels positifs à l'aide des puissances de 10 (d'exposant positif ou négatif). Lorsque les nombres sont des entiers naturels, le développement décimal correspond à l'écriture en base 10. Lorsqu'ils sont décimaux, on obtient un développement décimal limité. Lorsqu'ils sont rationnels, on peut obtenir un développement décimal illimité périodique. Enfin, lorsqu'ils sont irrationnels, le développement décimal est illimité et non périodique.

Sommaire

Cas des nombres entiers
Cas des nombres décimaux
Cas des nombres rationnels
Cas des nombres réels
Régularité dans les développements décimaux illimités
Curiosités
Développement en base quelconque
Articles connexes

Cas des nombres entiers

Tout nombre entier possède une écriture décimale qui nous est naturelle car enseignée depuis notre enfance. Nous prenons conscience du fait qu'il ne s'agit que d'une écriture lorsque les circonstances nous mettent en contact avec d'autres systèmes de numération.

Exemple : 123 827 = $1\times10^5 + 2\times10^4 + 3\times10^3 + 8\times10^2 + 2\times10^1 + 7\times10^0$

Cas des nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{N}{10^n}$ où N est un entier relatif et n un entier naturel.

Un nombre décimal positif possède alors un développement décimal limité comportant des puissances de 10 à exposant négatif mais le plus petit exposant ne peut être que - n.

Exemple : $\frac{1267}{625} = \frac{1267\times16}{10000} = \frac{2\times10^4+2\times10^2+7\times10^1+2\times10^0}{10^4}$

$$\frac{1267}{625} = 2\times10^0 + 2\times10^{-2} + 7\times10^{-3} + 2\times10^{-4}$$

Et on vérifie très simplement à l'aide d'une calculatrice que $\frac{1267}{625} = 2,0272$

Réciproquement : tout nombre possédant un développement décimal limité est un nombre décimal car il suffit de le multiplier par la puissance de 10 adéquate pour retomber sur un entier.

Cas des nombres rationnels

Aborder l'écriture décimale de la plupart des nombres rationnels nous fait rentrer dans le monde de l'infini car l'écriture ne s'arrête jamais. On parle de développement décimal illimité.

Exemple : Division de 13 par 7

```
13            |7
60            |1,85714285...
 40           |
  50          |
   10         |
    30        |
     20       |
      60      |
       40     |
```

Puisque l'on obtient de nouveau le reste 6 (avant dernière ligne), en abaissant le 0, on se trouvera à diviser encore 60 par 7, à réobtenir pour quotient 8, pour reste 4, etc. Le cycle 857142 s'appelle la période du développement décimal illimité périodique. On écrira $\frac{13}{7} = 1,\underline{857142}\ldots$. Toutefois, il est aussi possible de faire ressortir la période en plaçant une barre au-dessus de celle-ci ou plus rarement en l'encadrant entre crochets [].

La période du développement décimal ne commence pas toujours juste après la virgule : $\frac{83}{70} = 1,1\underline{857142}\ldots$.

On peut démontrer que tout nombre rationnel possède un développement décimal illimité périodique. Pour le comprendre, il suffit de généraliser le principe de la division précédente. Supposons que l'on divise P par Q, dans la division de P par Q, on est amené, pour les décimales après la virgule, à « abaisser des zéros ». Si le reste précédent est r, on cherche alors à diviser $10r$ par Q. Les restes de la division sont en nombre fini (0, 1, ..., Q - 1), donc on ne peut pas prolonger indéfiniment la division sans rencontrer deux restes identiques. Si on appelle r_1 et r'_1 les deux premiers restes identiques, on voit que la division de $10r_1$ par Q sera identique à celle de $10r'_1$ par Q, et donnera le même quotient $q_1 = q'_1$ et même reste $r_2 = r'_2$ et ainsi de suite.

Un nombre décimal possède aussi un développement décimal illimité de période 0.

Réciproquement, tout développement décimal illimité périodique correspond à l'écriture d'un rationnel.

Exemple : 3,25723723723... = x

100x = 325,723723723...
100x - 325 = y = 0,723723723... On peut remarquer que, si y est rationnel, x le sera aussi.
y = 0,723723...
1000y = 723,723723723...
1000y = 723 + y
999y = 723
$y = \frac{723}{999}$. y est alors un rationnel et x aussi.

La méthode se généralise pour tout développement décimal illimité périodique. On se débarrasse de la mantisse par une multiplication par la puissance de 10 adéquate et par la soustraction d'un nombre entier. On obtient alors un nombre y s'écrivant 0,périodepériodepériode.... sur lequel on effectue le même type d'opération que plus haut : multiplication par la puissance de 10 adéquate $10^n y$ = période + y. La résolution de l'équation précédente prouve que y est rationnel et donc que x est rationnel.

Cette méthode de décalage sera employée par la suite pour calculer de façon analogue la somme des termes d'une suite géométrique.

Cas particulier de 0,99999999... = y.

En utilisant la technique précédente, on obtient $10y$ = 9,99999... = 9 + y. La résolution de l'équation précédente mène donc à y = 1.

1 possède donc deux « développements décimaux illimités » périodiques : 1,000000... et 0,9999... Selon la définition d'un développement décimal illimité sur $\mathbf{R}$, seul sera retenu le premier développement illimité, le second s'appelant un développement impropre. Il en est plus généralement de même pour tous les nombres décimaux sauf 0 : on a ainsi, par exemple, 3/5 = 0,6000000... = 0,5999999..., et là encore, seul le premier développement est retenu.

Cas des nombres réels

Si x est un nombre réel, on construit les suites de nombres décimaux suivantes :

$$u_n = \frac{E(10^n\times x)}{10^n} \text{ et } v_n = \frac{E(10^n\times x)+1}{10^n} \text{ où } E(a) \text{ désigne la partie entière de } a.$$

u_n s'appelle l'approximation décimale de x par défaut à 10^{-n} et v_n celle par excès.

On démontre facilement que u_n et u_{n+1} ne diffèrent (éventuellement) que sur la $n+1^e$ décimale qui est de 0 pour u_n et de a_{n+1} pour u_{n+1}.

u_n s'écrit alors

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}$$

où a_0 est un entier relatif et où tous les a_k pour k = 1 à n sont des entiers compris dans {0, ..., 9}.

On démontre aussi que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes encadrant x, donc elles convergent vers x. On appelle alors développement décimal illimité la suite (a_n) et on remarquera que

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k 10^{-k}.$$

Réciproquement, si (a_n) est une suite d'entiers tels que tous les a_k pour k = 1 à n sont des entiers compris dans {0, ..., 9}, on démontre que la série $U_n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}$ est convergente dans $\mathbf{R}$ vers un réel $x = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k 10^{-k}$. Il faut maintenant distinguer deux cas :

- Si la suite (a_n) converge vers 9 (tous les termes égaux à 9 à partir d'un certain rang k), alors x est un décimal d'ordre k - 1. La suite (u_n) définie dans la première partie ne coïncidera pas à la suite (U_n). La suite (a_n) ne sera pas appelée un DDI.
- Si la suite ne converge pas vers 9, la suite (u_n) définie dans la première partie coïncidera à la suite (U_n) . La suite (a_n) sera appelée un DDI.

Cette construction d'un développement illimité permet de retrouver le **développement propre** d'un décimal 3,5670000..., ou d'un rationnel 3,25743743743... .

On démontre que cette définition construit une bijection entre les réels et les suites (a_n) d'entiers tels que tous les a_k pour k = 1 à n sont dans {0, ..., 9} et la suite ne stationne pas à 9.

Régularité dans les développements décimaux illimités

Sauf pour les décimaux et les rationnels dont le développement illimité est périodique, il n'est en général pas possible de « prévoir » les décimales d'un réel. Seuls des calculs poussés permettent de découvrir les premières décimales (on connaît jusqu'à présent les 1 241 100 000 000 premières décimales de π.)

Des études portant sur la fréquence des entiers dans les développements décimaux de $\sqrt{2}$ ou de π sont menées.

Lorsque la fréquence d'apparition de chaque chiffre est de 10 % dans le développement décimal, et, plus généralement, lorsque la fréquence d'apparition d'une suite de n chiffres donnée est (pour chaque suite) de 10^{-n}, on dit que le réel est un nombre normal.

Curiosités

- Le réel dont le développement décimal est 0,12345678910111213141516 17... possède un développement décimal prévisible non périodique. Ce réel est la constante de Champernowne, du nom du mathématicien anglais qui l'a inventé en 1933. Ce nombre est évidemment irrationnel, mais aussi transcendant (prouvé par Kurt Mahler en 1961), et normal en base 10.
- La constante de Copeland-Erdös 0,235711131719232931741... constituée de la succession des nombres premiers, est elle aussi normale en base 10...
- Le réel dont le développement décimal est 0,110001000000000000000001..., c'est-à-dire la somme des puissances factorielles négatives de 10 (10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-6} + ...+ $10^{-k!}$ + ...) possède un développement décimal prévisible non périodique. Ce réel est appelé la constante de Liouville parce qu'il figure parmi les premiers exemples explicites de nombres transcendants, fournis par Joseph Liouville.
- Le développement décimal est impossible dans un système positionnel sans zéro, c'est-à-dire que le développement décimal dépend non seulement d'un système de numération positionnel, mais également de l'usage du zéro positionnel.
- Si on tire au hasard, uniformément, un nombre réel entre 0 et 1, les chiffres de son développement décimal forment une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0,9]$. Ce fait est la clé de la démonstration du théorème du nombre normal, dû à Émile Borel : à l'occasion de cette démonstration, Émile Borel a découvert le lemme de Borel-Cantelli, et a démontré la première version connue de la loi forte des grands nombres.

Développement en base quelconque

Utiliser un développement **décimal** fait jouer un rôle particulier à la base 10. Tout ce qui précède s'applique à n'importe quel nombre entier **b** (comme base), supérieur à **1**. Cette fois, les nombres admettant deux développements seront ceux de la forme $\frac{a}{b^k}$, les nombres rationnels restant caractérisés par la périodicité de leur développement.

En fait la base 10 présente surtout un intérêt pratique, c'est celle à laquelle nous sommes habitués. Les bases **2** et **3** notamment sont très intéressantes.

Plaçons nous en base 2. L'application $d : \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \to [0,1]$ qui associe à une suite $(\epsilon_n)_{n\geq1}$, où ϵ_n vaut **0** ou **1**, le nombre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{2^n}$, est surjective (car tout nombre réel admet un développement en base **2**). Elle n'est pas bijective, puisque précisément les rationnels **dyadiques**, c'est-à-dire ceux de la forme $\frac{a}{2^k}$, admettent deux développements.

Plaçons nous maintenant en base 3. L'application qui à la même suite $(\epsilon_n)_{n\geq1}$ associe le nombre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon_n}{3^n}$ est maintenant injective. Elle n'est pas surjective : son image est l'ensemble de Cantor.

On peut tirer de cette représentation des choses curieuses, par exemple une *surjection* continue du segment $[0,1]$ dans le carré $[0,1]\times[0,1]$ (voir Courbe de Peano).

Articles connexes

- Écriture décimale positionnelle
- Développement décimal de l'unité

Ce document provient de « https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Développement_décimal&oldid=140204264 ».

La dernière modification de cette page a été faite le 30 août 2017 à 20:52.

Droit d'auteur : les textes sont disponibles sous licence Creative Commons attribution, partage dans les mêmes conditions ; d'autres conditions peuvent s'appliquer. Voyez les conditions d'utilisation pour plus de détails, ainsi que les crédits graphiques. En cas de réutilisation des textes de cette page, voyez comment citer les auteurs et mentionner la licence.
Wikipédia® est une marque déposée de la Wikimedia Foundation, Inc., organisation de bienfaisance régie par le paragraphe 501(c)(3) du code fiscal des États-Unis.