# Intégration par parties

En mathématiques, l'**intégration par parties** (parfois abrégée en IPP) est une méthode qui permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales. Elle est fréquemment utilisée pour calculer une intégrale (ou une primitive) d'un produit de fonctions. Cette formule peut être considérée comme une version intégrale de la règle du produit.

Le mathématicien Brook Taylor a découvert l'intégration par parties, publiant d'abord l'idée en 1715. Des formulations plus générales d'intégration par parties existent pour l'intégrale de Riemann-Stieltjes et pour l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes. L'analogue discret pour les suites est appelé sommation par parties.

## Sommaire



## Énoncé type

La formule-type est la suivante, où $u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables, de dérivées continues et $a$ et $b$ deux réels de leur intervalle de définition :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

ou encore, puisque $u'(x)\,\mathrm{d}x$ et $v'(x)\,\mathrm{d}x$ sont respectivement les différentielles de $u$ et de $v$ :

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

**Démonstration**

La démonstration du théorème découle directement de la règle du produit :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

On a donc

$$uv' = (uv)' - u'v$$

puis

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui, d'après le second théorème fondamental de l'analyse, donne l'égalité annoncée.

**Variante de « démonstration » avec la notation de Leibniz**

Soit deux fonctions dérivables $u$ et $v$. La règle de la dérivation d'un produit nous donne :

$$\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x} = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

En passant aux différentielles, on obtient :

$$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u.$$

On réarrange ensuite l'expression de la façon suivante :

$$u\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\mathrm{d}u.$$

Il suffit maintenant d'intégrer l'équation :

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}(uv) - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

On obtient alors :

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

# Choix des fonctions du produit

L'un des deux choix possibles pour les fonctions $u$ et $v'$ peut s'avérer meilleur que l'autre.

$$I = \int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

Si l'on choisit $u = \ln$ et $v'(x) = x$, on a $u'(x) = 1/x$ et l'on peut prendre $v(x) = x^2/2$, d'où :

$$I=\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2.$$

En revanche, si l'on choisit $u(x) = x$ et $v' = \ln$, on a $u' = 1$ et l'on peut prendre $v(x) = x\ln(x) - x$, d'où :

$$I=\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x=[x(x\ln x-x)]_1^2-\int_1^2(x\ln x-x)\,\mathrm{d}x.$$

On constate immédiatement que cette intégrale est plus compliquée que l'intégrale initiale, elle s'y ramène cependant puisque $\int_1^2(x\ln x-x)\,\mathrm{d}x=I-3/2.$

# Exemples

- Effectuons le calcul de
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x\,\mathrm{d}x$$
grâce à une intégration par parties.
Pour cela, posons $u(x) = x$, de telle sorte que $u' = 1$, et $v' = \cos$, de telle sorte que $v = \sin$, par exemple (c.-à-d. à une constante additive près, qui de toutes façons disparaîtrait au cours des calculs intermédiaires). Il vient :
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x\,\mathrm{d}x&=[u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\\&=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}+[\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}\\&=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$
- Il s'agit de la méthode classique[1] pour trouver une primitive du logarithme naturel :
$$\int_{\mathrm{e}}^{x}\ln t\,\mathrm{d}t=x\ln x-x.$$
- Une intégration par parties sur une intégrale impropre permet d'établir l'équation fonctionnelle de la fonction gamma.
- Une double intégration par parties (l'intégrale obtenue par l'application de la formule se calcule elle aussi par une nouvelle intégration par parties) permet par exemple de montrer[1] que
$$\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x\left(\sin x-\cos x\right)}{2}+C$$
et de même,
$$\int\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x\left(\sin x+\cos x\right)}{2}+C,$$

où le réel $C$ est une constante d'intégration.

# Généralisations

- On peut étendre ce théorème aux fonctions continues et de classe C[1] par morceaux sur le segment d'intégration (mais la continuité est indispensable).
- Par récurrence, on peut généraliser ce théorème aux fonctions de classe C$^{n+1}$ :

$$\int_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x = \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{(k)}v^{(n-k)}\right]_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Si, sur $[a, b]$, $u$ est absolument continue et $g$ est intégrable, alors

$$\int_a^b ug = [uv]_a^b - \int_a^b u'v,$$

pour toute fonction $v$ telle que

$$\forall x \in [a,b] \quad v(x) = v(a) + \int_a^x g.$$

La démonstration[2] est essentiellement la même que ci-dessus, avec des dérivées définies seulement presque partout et en utilisant l'absolue continuité de $v$ et $uv$.

# Formules d'intégrations par parties à plusieurs variables

L'intégration par parties peut être étendue aux fonctions de plusieurs variables en appliquant une version appropriée du théorème fondamentale de l'analyse (par exemple une conséquence du théorème de Stokes comme le théorème du gradient ou le théorème de la divergence) à une opération généralisant la règle de dérivation d'un produit.

Il existe donc de nombreuses versions d'intégrations par parties concernant les fonctions à plusieurs variables, pouvant faire intervenir des fonctions à valeurs scalaires ou bien des fonctions à valeurs vectorielles.

Certaines de ces intégrations par parties sont appelées identités de Green.

## Un exemple faisant intervenir la divergence

Par exemple, si $u$ est à valeurs scalaires et $\mathbf{V}$ à valeurs vectorielles et toutes deux sont régulières, on a la règle de la divergence d'un produit

$$\operatorname{div}(u\,\mathbf{V}) = u\,\operatorname{div}\mathbf{V} + \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{V}.$$

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ qui est borné et dont la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est lisse par morceaux. Appliquer le théorème de la divergence donne:

$$\int_\Gamma u\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Gamma = \int_\Omega \mathrm{div}(u\,\mathbf{V})\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega u\ \mathrm{div}\,\mathbf{V}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \mathrm{grad}\,u\cdot\mathbf{V}\,\mathrm{d}\Omega,$$

où $\mathbf{n}$ est la normale sortante unitaire à Γ. On a donc

$$\int_\Omega u\ \mathrm{div}(\mathbf{V})\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma u\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \mathrm{grad}(u)\cdot\mathbf{V}\,\mathrm{d}\Omega.$$

On peut donner des hypothèses plus faibles: la frontière peut être seulement lipschitzienne et les fonctions $u$ et $\mathbf{V}$ appartenir aux espaces de Sobolev $\mathrm{H}^1(\Omega)$ et $\mathrm{H}^1(\Omega)^d$.

### Première identité de Green

Soit $(e_1,\ldots,e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. En appliquant la formule d'intégration par parties ci-dessus à $u_i$ et $v\,e_i$ où $u$ et $v$ sont des fonctions scalaires régulières, on obtient une nouvelle formule d'intégration par parties

$$\int_\Omega u\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma u\,v\,n_i\,\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,v\,\mathrm{d}\Omega,$$

où $\mathbf{n} = (n_1,\ldots,n_d)$.

Considérons maintenant un champ de vecteurs régulier

$$\mathbf{U} = u_1\mathbf{e}_1 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n$$

En appliquant la formule d'intégration par parties ci-dessus à $u_i$ et $v\,e_i$ et en sommant sur $i$, on obtient encore une nouvelle formule d'intégration par parties

$$\int_\Omega \mathbf{U}\cdot\mathrm{grad}\,v\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma v\,\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega v\ \mathrm{div}\,\mathbf{U}\,\mathrm{d}\Omega.$$

La formule correspondante au cas où $\mathbf{U}$ dérive d'un potentiel $u$ régulier:

$$\mathbf{U} = \mathrm{grad}\,u,$$

est appelée *première identité de Green* :

$$\int_\Omega \mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{grad}\,v\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma v\ \mathrm{grad}\,u\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega v\,\Delta u\,\mathrm{d}\Omega.$$

## Notes et références

1. Voir les exemples de la leçon « Intégration par parties » sur Wikiversité.
2. (en) Stanisław Hartman (de) et Jan Mikusiński, *The Theory of Lebesgue Measure and Integration*, Pergamon, 1961 (lire en ligne (https://books.google.com/books?id=WcPSBQAAQBAJ&pg=PA103)), p. 103.

## Voir aussi

J.-C. Michel, « L'intégration par parties » (http://www.gecif.net/articles/mathematiques/integration_par_parties), Nombreux exemples d'intégration par parties bien détaillés, sur *gecif.net*

Sur les autres projets Wikimedia :

*Intégration par parties*, sur Wikiversity

---

Ce document provient de « https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Intégration_par_parties&oldid=187533665 ».

**La dernière modification de cette page a été faite le 29 octobre 2021 à 10:47.**

Droit d'auteur : les textes sont disponibles sous licence Creative Commons attribution, partage dans les mêmes conditions ; d’autres conditions peuvent s’appliquer. Voyez les conditions d’utilisation pour plus de détails, ainsi que les crédits graphiques. En cas de réutilisation des textes de cette page, voyez comment citer les auteurs et mentionner la licence. Wikipedia® est une marque déposée de la Wikimedia Foundation, Inc., organisation de bienfaisance régie par le paragraphe 501(c)(3) du code fiscal des États-Unis.