WIKIPÉDIA
L'encyclopédie libre

Logique intuitionniste

La **logique intuitionniste** est une logique qui diffère de la logique classique par le fait que la notion de vérité est remplacée par la notion de preuve constructive. Une proposition telle que « la constante d'Euler-Mascheroni est rationnelle ou la constante d'Euler-Mascheroni n'est pas rationnelle » n'est pas démontrée de manière constructive (intuitionniste)[1] dans le cadre de nos connaissances mathématiques actuelles; car la tautologie classique « P ou non P » (tiers exclu) n'appartient pas à la logique intuitionniste. La logique intuitionniste établit, entre autres, un *distinguo* entre « être vrai » et « ne pas être faux » (formulation plus faible) car $\neg\neg P \to P$ n'est pas non plus démontrable en logique intuitionniste.

Sommaire

- Histoire
- Syntaxe du langage de la logique intuitionniste
  - Syntaxe de la logique intuitionniste propositionnelle
  - Syntaxe de la logique intuitionniste du premier ordre
  - Non-interdéfinissabilité des opérateurs
- Règles de déduction naturelle
  - La logique implicative
  - La logique propositionnelle intuitionniste
    - L'absurde
    - La négation
    - La conjonction
    - La disjonction
  - Le calcul des prédicats intuitionniste
    - Le quantificateur universel
    - Le quantificateur existentiel
- Sémantique de la logique intuitionniste
  - Modèles de Kripke
    - Exemple
  - Correction de la logique intuitionniste
  - Complétude de la logique intuitionniste
- Relations avec la logique classique
  - Exemples de différences avec la logique classique
    - Quelques validités
    - Négation
    - Double négation
    - Conjonction
    - Disjonction
    - Quantificateur existentiel
    - Quantificateur universel
    - Tiers exclu
    - Relations entre les règles
  - Plongement de la logique classique dans la logique intuitionniste
  - Traduction en logique modale classique
  - Complexité algorithmique des problèmes de décision en logique intuitionniste
- Références
- Annexes
  - Bibliographie
    - Ouvrages
    - Liens externes
  - Articles connexes

Histoire

L'**intuitionnisme** a d'abord été une position philosophique vis-à-vis des mathématiques proposée par le mathématicien hollandais Luitzen Egbertus Jan Brouwer[2] comme une possibilité différant de l'approche dite classique ; cela l'a conduit à ne pas inclure certaines formes du raisonnement mathématique traditionnel, qu'il jugeait contre-intuitives :

- Le *tiers exclu*, qui consiste à dire qu'étant donnée une proposition P, on a soit P ou alors non P ;
- L'*existentiel non constructif*. Brouwer veut que quand un mathématicien affirme *il existe x tel que* $P(x)$, il donne aussi un moyen de construire x qui satisfait $P(x)$.

Brouwer a prôné une mathématique qui rejetterait le *tiers exclu* et n'accepterait que l'*existentiel constructif*. Cette attitude a été assez violemment critiquée[3] par des mathématiciens comme David Hilbert tandis que d'autres comme Hermann Weyl y ont souscrit.

Elle a été ensuite formalisée, sous le nom de **logique intuitionniste**, par ses élèves V. Glivenko[4] et Arend Heyting, ainsi que par Kurt Gödel[5] et Andreï Kolmogorov[6]. L'interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov ou simplement interprétation BHK est essentiellement la mise en évidence du caractère constructif de l'implication intuitionniste : Quand un mathématicien intuitionniste affirme $a \Rightarrow b$, il veut dire qu'il fournit un procédé de « construction » d'une démonstration de b à partir d'une démonstration de a. Autrement dit, une preuve de $a \Rightarrow b$ est une fonction qui transforme une preuve de a en une preuve de b.

Cette interprétation calculatoire trouvera son aboutissement dans un des plus importants résultats de l'informatique théorique : la correspondance de Curry-Howard dont le leitmotiv est « prouver, c'est programmer ». Il y a isomorphisme entre les règles de déduction de la logique intuitionniste et les règles de typage du lambda-calcul. En conséquence, une preuve d'une proposition P est assimilable à un (lambda-)terme de type P.

Dès lors, la logique intuitionniste (couplée à la théorie des types) acquiert un statut prépondérant en logique et en informatique théorique, en faisant d'elle historiquement la première des logiques constructives. Ce résultat fondateur engendrera de multiples travaux dérivés[7] ; notamment son extension à la logique d'ordre supérieur qui nécessite l'emploi de types dépendants (le calcul des constructions, par exemple, est la base théorique du logiciel Coq qui est donc, à la fois, un assistant de preuves (constructives), et un outil de création de programmes certifiés[8]).

Syntaxe du langage de la logique intuitionniste

La syntaxe de la logique intuitionniste propositionnelle est la même que pour la logique propositionnelle classique. La syntaxe de la logique intuitionniste du premier ordre est la même que la syntaxe de la logique classique du premier ordre.

Syntaxe de la logique intuitionniste propositionnelle

Construction	Lecture intuitive en logique classique	Lecture intuitive en logique intuitionniste
A	A est vraie	A est prouvable
$(A \vee B)$	A est vraie ou B est vraie	A est prouvable ou B est prouvable
$(A \wedge B)$	A est vraie et B est vraie	A est prouvable et B est prouvable
$\bot$	Faux	Faux
$(A \Rightarrow B)$	Si A est vraie alors B est vraie	Si A est prouvable alors B est prouvable
$\neg A$ (abréviation de $A \Rightarrow \bot$)	A est fausse	A est contradictoire

Syntaxe de la logique intuitionniste du premier ordre

Construction	Lecture intuitive en logique classique	Lecture intuitive en logique intuitionniste
$\exists x A(x)$	il existe un élément x tel que $A(x)$ est vraie	on peut construire un élément x tel que $A(x)$ est prouvable
$\forall x A(x)$	pour tout élément x, $A(x)$ est vraie	en prenant un élément quelconque x, $A(x)$ est prouvable

Non-interdéfinissabilité des opérateurs

La négation peut se définir à partir de l'implication : $\neg A$ se définit comme $A \Rightarrow \bot$. En logique propositionnelle classique, on peut définir la disjonction (le « ou ») à partir du « et » et de la négation grâce aux lois de Morgan. Par exemple, $(A \vee B)$ peut se définir comme un raccourci d'écriture pour $\neg(\neg A \wedge \neg B)$. En logique propositionnelle intuitionniste, ce n'est plus le cas et chaque opérateur a une interprétation différente (cf. tableau ci-dessus)[9]. De même, on ne peut pas définir $\exists x A(x)$ comme $\neg\forall x \neg A(x)$.

Règles de déduction naturelle

En logique intuitionniste, les connecteurs ne sont pas inter-définissables[10]. C'est pourquoi nous allons donner des règles pour chaque connecteur binaire, pour le connecteur unaire qu'est la négation et pour le symbole $\bot$ représentant le faux ou absurde. Nous donnons une (ou des) règle(s) d'élimination (E) et une (ou des) règle(s) d'introduction (I) pour chaque connecteur, typique de la déduction naturelle classique. En déduction naturelle, $\Gamma \vdash \varphi$ se lit *« de l'ensemble de propositions Γ on déduit la proposition φ »*.

La logique implicative

La logique minimale implicative a pour seul connecteur l'implication $\Rightarrow$. En déduction naturelle, ses règles, outre la règle axiome :

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi} \quad \textbf{(axiome)}$$

sont :

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} \quad (\Rightarrow E) \qquad\qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi} \quad (\Rightarrow I)$$

où la lettre Γ désigne un ensemble fini de formules, et la notation Γ, φ désigne $\Gamma \cup \{\varphi\}$, où φ peut être ou non présent dans Γ.

La règle $(\Rightarrow E)$ s'appelle la *règle d'élimination de l'implication*. Elle se lit comme suit : si de l'ensemble d'hypothèses Γ on déduit $\varphi \Rightarrow \psi$ et si de plus de l'ensemble d'hypothèses Γ on déduit φ alors de l'ensemble d'hypothèses Γ on déduit ψ. L'élimination de l'implication est aussi appelée *modus ponens*.

La règle $(\Rightarrow I)$ s'appelle la *règle d'introduction de l'implication*. Elle se lit comme suit : si de l'ensemble d'hypothèses Γ et de l'hypothèse φ on déduit ψ alors de l'ensemble d'hypothèses Γ on déduit $\varphi \Rightarrow \psi$ (φ peut appartenir ou ne pas appartenir à Γ).

La loi de Peirce $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi$ ou la proposition $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \rho) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho$, qui sont des tautologies de la logique classique, ne sont pas démontrables dans ce système de déduction. En lui ajoutant, par exemple la loi de Peirce, on obtient un système déductivement complet au sens de la logique classique pour les formules purement implicationnelles (voir Calcul propositionnel implicationnel (en)).

La logique propositionnelle intuitionniste

La logique intuitionniste comporte les règles de l'implication, de la logique minimale, plus les règles ci-dessous régissant les autres connecteurs.

L'absurde

Le faux ou absurde, $\bot$, est un connecteur zéro-aire, c'est-à-dire qui n'a pas de proposition en argument, il est régi par la règle :

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad (\bot E).$$

Cette règle est nommée principe d'explosion, ou en latin, *ex falso quodlibet*. Le principe d'explosion signifie que si un ensemble de propositions Γ conduit à l'absurde ⊥, alors de Γ, on peut déduire n'importe quelle proposition φ.

La négation

Traditionnellement, on considère la négation $\neg\varphi$ comme l'abréviation $\varphi \Rightarrow \bot$ et on ne donne donc pas habituellement de règles correspondant à la négation. Cependant on pourrait en donner, pour simplifier des démonstrations et elles seraient :

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\varphi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \bot} (\neg E) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi} (\neg I)$$

Il est à noter que ces règles pour la négation intuitionnistes sont plus faibles que celles de la négation classique, car pour exemple on ne peut pas y déduire φ de $\neg\neg\varphi$.

La conjonction

Au connecteur $\wedge$ (conjonction), on associe deux règles d'élimination, $\wedge E_1$ et $\wedge E_2$, et une règle d'introduction.

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2}{\Gamma \vdash A_i} \quad (\wedge E_i) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad (\wedge I)$$ où $A \wedge B$ se lit « A et B ».

La disjonction

Au connecteur $\vee$ (disjonction), on associe une règle d'élimination et deux règles d'introduction :

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \quad (\vee E) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A_i}{\Gamma \vdash A_1 \vee A_2} \quad (\vee I_i).$$

On remarque que la règle d'*élimination de la disjonction* est une règle tryadique : elle a trois prémisses.

Le calcul des prédicats intuitionniste

En plus des règles du calcul propositionnel intuitionniste, le calcul des prédicats intuitionniste contient de nouvelles règles d'introduction et d'élimination pour les quantificateurs « quel que soit » et « il existe ».

Remarque : Nous rappelons que A[t/x] signifie le remplacement de toutes les occurrences librement substituables de la variable x par le terme t ; voir calcul des prédicats pour les notions de « variable », « terme », « substitution » et de « librement substituable ».

Le quantificateur universel

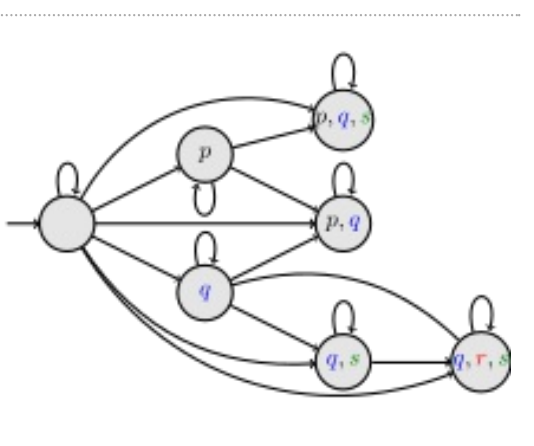
$$\frac{\Gamma, A[t/x] \vdash B}{\Gamma, \forall x A \vdash B} (\forall E) \; \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A} (\forall I)$$

Le quantificateur existentiel

$$\frac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x A} (\exists E) \; \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \exists x A \vdash B} (\exists I)$$

Sémantique de la logique intuitionniste

Modèles de Kripke



Un modèle de Kripke pour la logique intuitionniste. Plus on avance dans le temps, plus on apprend des variables propositionnelles.

On peut donner une sémantique à la logique intuitionniste qui est une sémantique de Kripke[11]. Un modèle de Kripke $\mathcal{M}$ est un graphe où :

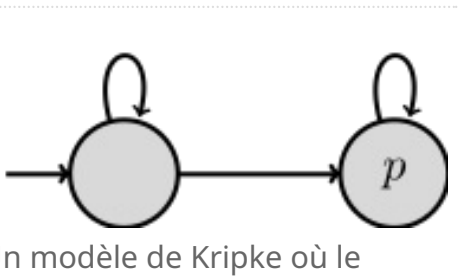
- les nœuds sont des *mondes possibles*. Selon Kripke, ces mondes représentent des contenus d'information fondés sur des preuves (*evidential situations*)[11]. Chaque monde est muni d'une valuation classique : intuitivement, pour chaque variable propositionnelle p, p est vraie dans un monde si on a assez d'information pour prouver p et p est fausse sinon ;
- une relation d'accessibilité de préordre sur les mondes : une relation réflexive et transitive hiérarchise les mondes. Pour Kripke, un arc m → m' signifie que m' est dans le « futur »[11, 12] de m ;
- la valuation est telle que si une variable propositionnelle p est vraie dans m et que m' est dans le « futur » de m, p est aussi vraie dans m' (on ne perd pas d'information et donc on peut toujours prouver p).

La sémantique d'une formule est donné par rapport à un modèle de Kripke $\mathcal{M}$ et un monde désigné comme le monde courant m. On parle alors de modèle de Kripke pointé $(\mathcal{M}, m)$. Dans certains ouvrages, on écrit alors $\mathcal{M}, m \models \varphi$ pour dire que la formule φ est vraie dans $(\mathcal{M}, m)$. On dit aussi que $(\mathcal{M}, m)$ satisfait formule φ. Plus simplement, comme le modèle de Kripke $\mathcal{M}$ est fixé, on dit qu'un monde m satisfait une formule φ, ou que le monde m *force*[11, 12] une formule φ. La relation *forçage* de (ou de *réalisabilité*) est définie par induction structurelle par :

- le monde m force une variable propositionnelle p si p est vraie dans le monde m ;
- le monde m force $(\varphi \wedge \psi)$ si m force φ et m force ψ ;
- le monde m force $(\varphi \vee \psi)$ si m force φ ou m force ψ ;
- le monde m force $(\varphi \Rightarrow \psi)$ si pour tout monde m' accessible depuis m, si m' force φ alors m' force ψ (certains auteurs appellent l'ensemble des mondes accessibles depuis un monde un *cône*[réf. nécessaire]) ;
- le monde m force $\neg\varphi$ (il s'agit de l'abréviation $\varphi \Rightarrow \bot$) si pour tout monde m' accessible depuis m, m' ne force pas φ.

Une formule φ est *valide* si pour tout monde m de tout modèle $\mathcal{M}$, m force φ.

Exemple



Un modèle de Kripke où le monde de gauche ne force pas le tiers-exclu $(p \vee \neg p)$ et ne force pas la loi de Peirce $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$.

Le tiers-exclu $(p \vee \neg p)$ n'est pas valide. Pour le voir, donnons un modèle de Kripke pointé qui ne satisfait pas $(p \vee \neg p)$. Considérons le modèle de Kripke dans la figure à droite. Ce modèle contient deux mondes possibles : l'un (celui de gauche) où p est faux, l'autre (celui de droite) où p est vrai.

Le monde de gauche est le monde pointé ou monde initial. Il ne satisfait pas le tiers exclu $(p \vee \neg p)$. En effet :

- d'une part, le monde initial ne force pas p (intuitivement, p n'est pas prouvé car p est fausse donc cela signifie que l'on n'a pas encore assez d'informations)
- d'autre part, le monde initial ne force pas $\neg p$. En effet, le monde de droite est accessible depuis le monde initial mais malheureusement il force p. Cette situation signifie intuitivement qu'en fournissant un peu plus d'effort, on peut « gagner plus d'informations » et arriver dans le monde de droite et prouver p.

Aussi :

- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ (loi de Peirce) n'est pas valide : le monde de gauche du modèle de Kripke à droite ne force pas $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$;
- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow r) \Rightarrow r$ n'est pas valide.

Correction de la logique intuitionniste

La logique intuitionniste est correcte vis-à-vis des modèles de Kripke[13], c'est-à-dire que toute formule démontrable (par exemple avec les règles de déduction naturelle de la section précédente) est valide. On peut utiliser ce résultat pour montrer qu'une formule n'est pas démontrable en logique intuitionniste. Par exemple, comme le tiers-exclu $(p \vee \neg p)$ ou la loi de Peirce $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ ne sont pas valides, elles ne sont pas démontrables.

Complétude de la logique intuitionniste

Toute formule *valide* est *démontrable*[13]. La démonstration se fait de la façon suivante : si φ n'est pas démontrable alors on peut construire un contre-modèle (infini) de φ c'est-à-dire un modèle $\mathcal{M}$ contenant un monde qui ne force pas φ.

Relations avec la logique classique

Exemples de différences avec la logique classique

Les opérations ne sont pas définies l'une par rapport à l'autre (voir plus loin), et ne sont définies qu'en elles-mêmes. Elles sont définies par l'interprétation qui doit en être faite. Pour cette raison, en plus des règles de calcul, sont données les interprétations qui doivent être faites des expressions de chaque opérateur[9].

Quelques validités

Le tableau suivant donne quelques validités de la logique intuitionniste.

Validités en logique intuitionniste	Explications pour $\Rightarrow$	Explications pour $\Leftarrow$
$A \Rightarrow \neg\neg A$	✔ Si A est prouvable, alors il est prouvé que A n'est pas contradictoire.	✗ Par exemple, il est prouvé que « il pleut » n'est pas contradictoire (on n'obtient pas de contradiction en supposant « il pleut »). Pourtant, « il pleut » n'est pas prouvable, sauf si on sort et qu'on se fait mouiller.
$\neg A \Leftrightarrow \neg\neg\neg A$	✔ Si A est contradictoire, alors une preuve que A n'est pas contradictoire donne une contradiction.	✔ Si on a une preuve que A n'est pas contradictoire donne une contradiction, alors A est contradictoire.
$(\neg A) \vee (\neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$	✔ Si A est contradictoire ou B est contradictoire, alors « A et B » est contradictoire.	✗ Par exemple, être grand et petit est contradictoire. Pourtant, être grand n'est pas contradictoire et être petit n'est pas contradictoire.
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$	✔ Si on obtient une contradiction d'une preuve de A ou d'une preuve de B, alors A est contradictoire et B est contradictoire.	✔ Si A est contradictoire et B est contradictoire, alors d'une preuve de A ou d'une preuve de B, on obtient une contradiction.
$((\neg A) \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	✔ Si A est contradictoire ou alors B est prouvable, alors si j'ai une preuve de A (ce qui n'existe pas !), j'ai une preuve de B.	✗ Par exemple, je construis une preuve de « x>0 » qui utilise une preuve « x>1 ». Pourtant, « x>1 » n'est pas contradictoire et « x>0 » n'est pas prouvable.
$\neg(\exists x A(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg A(x))$	✔ Si « il existe x tel que A(x) » est contradictoire, alors pour tout x, A(x) est contradictoire.	✔ Si pour tout x, A(x) est contradictoire, alors « il existe x tel que A(x) » est contradictoire.
$\exists x(\neg A(x)) \Rightarrow \neg(\forall x A(x))$	✔ Si je peux construire un x tel que A(x) donne une contradiction, alors « pour tout x, A(x) » est contradictoire.	✗ Par exemple, « pour tout x, x est pauvre » est contradictoire (car je vois qu'il existe des richesses). Pourtant, je ne peux pas trouver un individu x (riche) tel que x est pauvre soit contradictoire.

En logique classique, les formules obtenues en remplaçant les implications par des équivalences sont des validités (le tableau contiendrait que des ✓).

Négation

On peut interpréter $\neg A$ comme : « Il est démontré que A est contradictoire ».

On dispose en logique intuitionniste du théorème suivant :

- $\neg A \Leftrightarrow \neg\neg\neg A$

Cependant, on ne peut pas en conclure $A \Leftrightarrow \neg\neg A$, car cette équivalence ne peut pas être prouvée en logique intuitionniste.

Double négation

On peut interpréter $\neg\neg A$ comme : « Il est démontré qu'il est contradictoire d'affirmer que A est contradictoire », c'est-à-dire « Il est démontré que A n'est pas contradictoire ». Mais on ne peut pas en déduire que « A est démontrable ».

Le théorème :

- $A \Rightarrow \neg\neg A$

peut être démontré en logique intuitionniste. Mais la réciproque ne peut pas l'être. On n'a pas $\neg\neg A \Rightarrow A$. L'expression $A \Rightarrow \neg\neg A$ peut s'interpréter comme « d'une démonstration de A, on peut construire une démonstration de $\neg\neg A$ ». Mais le fait que A ne soit pas contradictoire n'est pas suffisant pour établir une démonstration de « A ».

À titre d'exemple, soit *x* un réel et A la proposition *x* est rationnel. Démontrer A, c'est donner deux entiers *a* et *b* tels que *x* = *a*/*b*. Si A est contradictoire (et donc si on a $\neg A$), c'est que *x* est non rationnel, ou irrationnel. Dire que l'on a $\neg\neg A$, c'est dire que supposer *x* irrationnel conduit à une contradiction, et donc conclure que *x* n'est pas irrationnel. Mais ce n'est pas suffisant pour établir l'existence effective de deux entiers *a* et *b* tels que *x* = *a*/*b*. Ainsi, en logique intuitionniste, ne pas être irrationnel est une propriété différente et plus faible que celle d'être rationnel.

Conjonction

L'interprétation de $A \wedge B$ est : on dispose d'une preuve de A et d'une preuve de B (comparable à ce qu'il en est en logique classique).

En logique intuitionniste, la proposition suivante est un théorème :

- $(\neg A) \vee (\neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$

Mais contrairement à ce qu'il en serait en logique classique, $\neg(A \wedge B)$ n'est seulement qu'une conséquence de $(\neg A) \vee (\neg B)$, la réciproque étant fausse. En effet, supposer que $A \wedge B$ est contradictoire, est insuffisant en logique intuitionniste pour conclure si A seul l'est ou B seul ou s'ils le sont tous les deux. Par exemple, supposer qu'un nombre est à la fois rationnel et irrationnel est contradictoire, mais insuffisant pour conclure si ce nombre est irrationnel ou non.

Disjonction

L'interprétation de $A \vee B$ est : on a une preuve de A ou une preuve de B.

On dispose en logique intuitionniste du théorème suivant :

- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$

A et *B* s'excluent mutuellement et ne sont pas simultanément démontrables. Cette situation est comparable à ce qu'il en serait dans la logique classique de Boole et Karnaugh.

Par contre, le théorème suivant :

- $((\neg A) \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

est valide en logique intuitionniste, mais pas sa réciproque. En effet, si *x* est un nombre réel, on sait que s'il est rationnel alors il n'est pas irrationnel, mais on n'est pas pour autant capable de conclure si ce nombre est irrationnel ou non.

Quantificateur existentiel

L'interprétation de $\exists x A(x)$ est : nous pouvons créer un objet x et prouver que $A(x)$. L'existence de *x* est ici effective ou constructive. Il ne s'agit pas d'une existence théorique d'un élément x vérifiant $A(x)$.

On dispose du théorème suivant :

- $\neg(\exists x A(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg A(x))$

S'il n'existe pas de *x* qui vérifie *A(x)* alors pour tous les *x* on ne vérifie pas *A(x)*, d'où l'équivalence (qui correspond à l'intuition et se formule naturellement). Cette propriété est comparable à ce qu'il en serait en logique classique.

Quantificateur universel

L'interprétation de $\forall x A(x)$ est : on a une preuve que pour chaque x appartenant à l'ensemble spécifié, on peut prouver A(x) (comparable à ce qu'il en est en logique classique).

On dispose en logique intuitionniste du théorème suivant :

- $\exists x(\neg A(x)) \Rightarrow \neg(\forall x A(x))$

Mais contrairement à ce qu'il en serait en logique classique, la réciproque est fausse. En effet, cette réciproque exigerait que, en supposant contradictoire l'universalité de la propriété $A(x)$, on soit capable d'exhiber explicitement un objet *x* invalidant $A(x)$, ce qui est rarement possible.

On peut aussi dire que, en logique intuitionniste, l'affirmation de $\exists x A(x)$ est l'affirmation de l'existence effective et constructible d'un objet *x* validant $A(x)$, alors que $\neg(\forall x \neg A(x))$ n'en est que l'existence théorique, exprimant seulement qu'il est contradictoire que $A(x)$ soit universellement contradictoire. La logique classique ne fait aucune distinction entre ces deux existences, alors que la logique intuitionniste considère la deuxième comme plus faible que la première.

Tiers exclu

La proposition suivante

- $A \vee \neg A$

est un théorème de la logique classique, mais pas de la logique intuitionniste. Dans cette dernière, elle signifierait que nous pouvons prouver A ou prouver $\neg A$, ce qui n'est pas toujours possible.

Par exemple, en arithmétique munie de la logique intuitionniste (dite arithmétique de Heyting), l'expression $(x = y \vee x \neq y)$ est valide, car pour tout couple d'entiers, on peut prouver qu'ils sont égaux, ou on peut prouver qu'ils sont différents. Il en est de même pour deux rationnels. Mais pour deux réels en analyse constructive, on ne dispose pas de méthode générale permettant de prouver que $x = y$ ou de prouver que $x \neq y$. Cette situation correspond bien à ce qu'on rencontre en algorithmique, où l'égalité ou l'inégalité entre deux réels peut être non calculable, c'est-à-dire, non décidable.

Relations entre les règles

Pour mieux comprendre, on remarquera dans ce qui précède, que contrairement à ce qu'il en est dans la logique de Boole, la conjonction ∧ ne peut pas être reformulée en termes de disjonction ∨ et que le quantificateur existentiel ∃ ne peut pas être reformulé en termes de quantificateur universel ∀ ; ceci en vertu du principe du constructivisme. Dit d'une autre manière et dans des termes peut-être plus proches de l'informatique : il n'est pas permis de réduire les contraintes d'une expression.

Les interprétations des expressions ne se font pas à l'aide de $\boldsymbol{Vrai}$ et $\boldsymbol{Faux}$, mais grâce aux concepts *Prouvable* et *Contradictoire*.

Plongement de la logique classique dans la logique intuitionniste

Kurt Gödel a proposé une traduction de la logique classique dans la logique intuitionniste : la « non-non traduction (en) », qui rend démontrable en logique intuitionniste toute formule démontrable en logique classique. Ainsi, en ce sens précis, la logique intuitionniste *ne démontre pas moins* que la logique classique.

De manière plus économe que la saturation des formules et sous-formules par des doubles négations, Gödel a remarqué que si on considère une fonction f de l'ensemble des formules dans l'ensemble des formules définie par :

1. $f(\bot) = \bot$
2. $f(A) = \neg(\neg A)$, pour une formule atomique A différente de $\bot$
3. $f(A \wedge B) = f(A) \wedge f(B)$
4. $f(A \vee B) = \neg[\neg f(A) \wedge \neg f(B)]$
5. $f(A \Rightarrow B) = f(A) \Rightarrow f(B)$
6. $f(\forall x P(x)) = \forall x f(P(x))$
7. $f(\exists x P(x)) = \neg(\forall x \neg f(P(x))$;

où A et B sont des formules quelconques et P est une formule ayant x comme paramètre ;

alors on a le théorème suivant :

- $\Gamma \vdash_c A \Leftrightarrow f(\Gamma) \vdash_i f(A)$.

Où $\vdash_c$ est la déduction classique et $\vdash_i$ est la déduction intuitionniste.

Traduction en logique modale classique

La logique intuitionniste peut être traduite dans la logique modale classique $\mathbf{S4}$[14] munie d'une modalité $\Box$. La construction $\Box A$ se lit « A est prouvable »[15]. La traduction est définie par :

$T(p) = \Box p$ pour toute variable propositionnelle p ;
$T(\bot_i) = \bot_c$;
$T(A \wedge_i B) = T(A) \wedge_c T(B)$;
$T(A \vee_i B) = T(A) \vee_c T(B)$;
$T(A \rightarrow_i B) = \Box(T(A) \rightarrow_c T(B))$.

Une formule A est valide en logique intuitionniste si et seulement si $T(A)$ est valide dans la logique modale $\mathbf{S4}$ classique (c'est-à-dire valide sur les modèles de Kripke réflexifs et transitifs).

Complexité algorithmique des problèmes de décision en logique intuitionniste

Le problème de la décision de la satisfiabilité et le problème de la décision de la validité en logique propositionnelle intuitionniste sont PSPACE-complets[16]. D'ailleurs, ils demeurent PSPACE-complets même si on restreint les formules à deux variables[17].

Références

1. Le caractère non démontré de l'irrationalité de la constante d'Euler-Mascheroni est rappelé dans la conjecture 1.0.1 de (en) Jeffrey Lagarias, Euler's constant: Euler's work and modern developments, 98 pages, 258 références. (2013) [lire en ligne (https://arxiv.org/pdf/1303.1856v6)] [PDF]
2. (en) *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, « Intuitionistic Logic » (http://plato.stanford.edu/entries/logic-intuitionistic/) par Joan Moschovakis.
3. (en) Brouwer–Hilbert controversy
4. Glivenko, V., 1928, « Sur la logique de M. Brouwer », Académie Royale de Belgique, *Bulletin de la classe des sciences*, 14: 225–228.
5. Kurt Godel, Collected Works, Vol. III, Oxford: Oxford University Press (1995).
6. Andreï Kolmogorov, « On the principle of the excluded middle » (1925) in Jean van Heijenoort, 1967. *A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Harvard Univ. Press : 414–37.
7. *Les Métamorphoses du calcul. Une étonnante histoire de mathématiques*, Paris, Édition Le Pommier, coll. « Essais », 2007, 223 p. (ISBN 978-2-7465-0324-3)
8. Il faut comprendre par là, que lorsque le programmeur construit une fonction dont il aura spécifié le type des arguments et du résultat, il s'astreint à respecter cette spécification puisqu'il doit fournir un objet correctement typé. Les types dépendants offrent une typage plus puissant que la plupart des langages, et permettent la spécification complète d'un programme.
9. Joseph Vidal-Rosset, « Intuitionnisme » (http://jvrosset.free.fr/EU-Intuitionism.pdf), Université de Nancy 2, 2006 (sur l'interprétation des expressions et la philosophie).
10. Sauf la négation ci-dessous qui peut se définit via le faux et l'implication. Autrement dit, on ne peut pas définir, comme en logique classique, tous les connecteurs à partir d'un unique connecteur binaire comme la barre de Sheffer ou deux connecteurs comme la négation et l'implication.
11. Saul A. Kripke, *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I*, Elsevier, coll. « Formal Systems and Recursive Functions », 1er janvier 1965 (lire en ligne (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0049237X08716859)), p. 92–130.
12. R. David, K. Nour, C. Raffalli, *Introduction à la logique : Théorie de la démonstration : Cours et exercices corrigés*, Dunod, 2001, p. 159 « L'ordre sur le temps ».
13. *Structure and Logic*, Springer Universitext, 1980. (ISBN 3-540-20879-8).
14. Michel Lévy, « Traduction de la logique intuitioniste en logique modele » (http://lig-membres.imag.fr/michel.levy/S4Lint.pdf), sur *LIG*, 2011.
15. (en) Juliette Kennedy, « Kurt Gödel, 2.5.3 Intuitionistic Propositional Logic is Interpretable in S4 » (http://plato.stanford.edu/entries/goedel/#IntProLogIntS4), sur *stanford.edu*, 13 février 2007
16. (en) Richard Statman, « Intuitionistic propositional logic is polynomial-space complete », *Theoretical Computer Science*, vol. 9, 1er juillet 1979, p. 67–72 (DOI 10.1016/0304-3975(79)90006-9 (https://dx.doi.org/10.1016/0304-3975%2879%2990006-9), lire en ligne (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397579900069), consulté le 12 avril 2016).
17. (en) M. Rybakov, « Complexity of intuitionistic and Visser's basic and formal logics in finitely many variables », *Proceedings of Advances in Modal logic*, 2006.

Annexes

Bibliographie

Ouvrages

- Jean Largeault, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, Paris, J. Vrin, 1992, 566 p. (ISBN 2-7116-1059-4, présentation en ligne (https://books.google.fr/books?id=spBmyTWlFQ8C))
  Textes de Bernays, Brouwer, Gentzen, Gödel, Hilbert, Kreisel et Weyl réunis, traduits et présentés par Jean Largeault.
- Arend Heyting *Les fondements des mathématiques, intuitionnisme, théorie de la démonstration*, Gauthier-Villars, Nauwelaerts, 1955, 91 pages.
- Jean Largeault, *L'Intuitionisme*, Paris, Presses universitaires de France, 1992.
- René David, Karim Nour et Christophe Raffali, *Introduction à la logique*, Dunod, 2001.
- Jean-Yves Girard, *Le point aveugle*, Tome I, Hermann, 2007.

Liens externes

- Richard Moot et Christian Retoré, « La "non-non" traduction de Gödel-Kolmogorov » (http://www.labri.fr/perso/retore/LL/nonnon_sujet.pdf), Université Bordeaux I, 2007 ou sur arXiv https://arxiv.org/abs/1602.07608
- Étienne Lozes, « TD non non traduction » (http://www.lsv.ens-cachan.fr/~lozes/Lambda/TD-10.pdf), Laboratoire Spécification et Vérification — ENS Cachan, 2009
- Alexandre Miquel, « Réalisabilité et extraction de programmes » (http://www.pps.jussieu.fr/~miquel/slides/realis.pdf), Laboratoire Preuves, Programmes et Systèmes (PPS) de Jussieu, 2005 (sur la logique intuitionniste et l'interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov — interprétation BHK)
- Michel Lévy Preuve en logique intuitionniste propositionnelle (http://teachinglogic.univ-grenoble-alpes.fr/DN)

Articles connexes

- Algèbre de Heyting
- Analyse constructive
- Constructivisme (mathématiques)
- Logique classique
- Logique de la prouvabilité
- Logique minimale
- Sémantique de Kripke

Ce document provient de « https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Logique_intuitionniste&oldid=191380798 ».