



Paste

Make new paste

User

Login with Salsa

Links

Debian

About

API Documentation

Admin

Alexander Wirt

Version: v0.7.3

Posting 61d88012 from anonymous posted at 2026-01-23 17:30:46 expires: 2026-01-24 17:30:46

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

136

137

138

139

140

141

142

143

144

145

146

147

148

149

150

151

152

153

154

155

156

157

158

159

160

161

162

163

164

165

166

167

168

169

170

171

172

173

174

175

176

177

178

179

180

181

182

183

184

185

186

187

188

189

190

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200

201

202

203

204

205

206

207

208

209

210

211

212

213

214

215

216

217

218

219

220

221

222

223

224

225

226

227

228

229

230

231

232

233

234

235

236

237

238

239

240

241

242

243

244

245

246

247

248

249

250

251

252

253

254

1 ---> Pourquoi la trace d'une matrice s'appelle la trace ?

2

3 ChatGPT a dit :

4

5 Bonne question – le nom est moins arbitraire qu'il n'y paraît 😊

6 Origine du terme « trace »

7

8 Le mot trace vient du latin trahere (« tirer ») puis de traces (« empreinte, marque laissée »). En mathématiques, l'idée est celle de ce qui reste d'un

9

10 Pour une matrice carrée $A=(a_{ij})A=(a_{ij})$, la trace est

11 $\text{tr}(A)=\sum_i a_{ii}$,

12 $\text{tr}(A)=i\sum_i a_{ii}$,

13

14 c'est-à-dire la somme des coefficients diagonaux. Mais ce n'est pas juste une somme arbitraire : c'est une quantité qui conserve l'information fondamentale

15 Interprétation conceptuelle

16

17 Historiquement et conceptuellement, la trace est :

18

19 la somme des valeurs propres (avec multiplicités),

20

21 indépendante de la base choisie,

22

23 l'empreinte globale de l'action de l'opérateur sur l'espace.

24

25 Autrement dit, quand on change de base, tous les coefficients de la matrice changent... sauf cette combinaison particulière, qui « laisse une trace » in

26 Point de vue opérateurs linéaires

27

28 Si AA représente un endomorphisme ff , la trace peut être vue comme :

29

30 la trace laissée par ff sur l'espace tout entier,

31

32 une mesure de son effet moyen sur les directions de l'espace.

33

34 C'est pourquoi en algèbre linéaire abstraite on définit souvent la trace sans matrice, comme une application linéaire sur l'algèbre des endomorphismes.

35 Analogies utiles

36

37 En physique (mécanique quantique, thermodynamique), la trace sert à « additionner l'effet global » d'un opérateur.

38

39 En analyse, elle joue un rôle analogue à une intégrale discrète sur les valeurs propres.

40

41 En géométrie, elle apparaît comme une trace infinitésimale de la transformation (dilatation, contraction).

42

43

44 En résumé

45

46 La trace s'appelle ainsi parce qu'elle est :

47

48 ce qui reste invariant quand tout le reste change,

49

50 l'empreinte essentielle d'un opérateur linéaire,

51

52 une quantité qui « trace » l'effet global de la transformation.

53

54 Si tu veux, je peux aussi t'expliquer :

55

56 l'origine historique précise du terme,

57

58 le lien avec la trace d'un noyau intégral,

59

60 ou pourquoi la trace apparaît naturellement via $\text{tr}(AB)=\text{tr}(BA)\text{tr}(AB)=\text{tr}(BA)$.

61

62 -----

63 Pourquoi la trace d'une matrice s'appelle la trace ?

64 ChatGPT a dit :

65

66 Bonne question – le nom est moins arbitraire qu'il n'y paraît 😊

67 Origine du terme « trace »

68

69 Le mot trace vient du latin trahere (« tirer ») puis de traces (« empreinte, marque laissée »). En mathématiques, l'idée est celle de ce qui reste d'un

70

71 Pour une matrice carrée $A=(a_{ij})A=(a_{ij})$, la trace est

72 $\text{tr}(A)=\sum_i a_{ii}$,

73 $\text{tr}(A)=i\sum_i a_{ii}$,

74

75 c'est-à-dire la somme des coefficients diagonaux. Mais ce n'est pas juste une somme arbitraire : c'est une quantité qui conserve l'information fondamentale

76 Interprétation conceptuelle

77

78 Historiquement et conceptuellement, la trace est :

79

80 la somme des valeurs propres (avec multiplicités),

81

82 indépendante de la base choisie,

83

84 l'empreinte globale de l'action de l'opérateur sur l'espace.

85

86 Autrement dit, quand on change de base, tous les coefficients de la matrice changent... sauf cette combinaison particulière, qui « laisse une trace » in

87 Point de vue opérateurs linéaires

88

89 Si AA représente un endomorphisme ff , la trace peut être vue comme :

90

91 la trace laissée par ff sur l'espace tout entier,

92

93 une mesure de son effet moyen sur les directions de l'espace.

94

95 C'est pourquoi en algèbre linéaire abstraite on définit souvent la trace sans matrice, comme une application linéaire sur l'algèbre des endomorphismes.

96 Analogies utiles

97

98 En physique (mécanique quantique, thermodynamique), la trace sert à « additionner l'effet global » d'un opérateur.

99

100 En analyse, elle joue un rôle analogue à une intégrale discrète sur les valeurs propres.

101

102 En géométrie, elle apparaît comme une trace infinitésimale de la transformation (dilatation, contraction).

103

104 En résumé

105

106 La trace s'appelle ainsi parce qu'elle est :

107

108 ce qui reste invariant quand tout le reste change,

109

110 l'empreinte essentielle d'un opérateur linéaire,

111

112 une quantité qui « trace » l'effet global de la transformation.

113

114 Si tu veux, je peux aussi t'expliquer :

115

116 l'origine historique précise du terme,

117

118 le lien avec la trace d'un noyau intégral,

119

120 ou pourquoi la trace apparaît naturellement via $\text{tr}(AB)=\text{tr}(BA)\text{tr}(AB)=\text{tr}(BA)$.

121

122 Vous avez dit :

123 Je veux bien que tu m'expliques l'historique précis du terme

124 ChatGPT a dit :

125

126 Voici l'historique précis et documenté du terme trace en mathématiques, en distinguant bien les origines linguistiques, l'apparition mathématique, et l

127 1. Origine linguistique du mot

128

129 Le mot trace vient du latin traces, pluriel de trahere (« tirer », « traîner »), qui désigne :

130

131 une empreinte laissée par un passage (pas, sillon, marque),

132

133 ce qui reste après une action.

134

135 Dans les mathématiques européennes du XIX^e siècle, le vocabulaire est fortement influencé par :

136

137 le français,

138

139 l'allemand (Spur),

140

141 et le latin savant.

142

143 Le terme est donc déjà chargé de l'idée de résidu invariant.

144 2. Avant les matrices : invariants des substitutions (XVIII^e-XIX^e)

145

146 Avant que le langage matriciel ne soit standardisé, on parle de :

147

148 substitutions linéaires,

149

150 formes bilinéaires,

151

152 transformations linéaires.

153

154 Des mathématiciens comme :

155

156 Lagrange

157

158 Cauchy

159

160 Jacobi

161

162 étudient des quantités associées à ces transformations qui ne dépendent pas du système de coordonnées.

163

164 🟡 À cette époque, la somme des coefficients diagonaux apparaît implicitement, mais sans nom unifié.

165 3. Apparition explicite du terme « trace » (milieu XIX^e)

166 Arthur Cayley (1858)

167

168 Cayley introduit le calcul matriciel moderne. Il remarque que :

169

170 la somme des éléments diagonaux est invariante par conjugaison,

171

172 elle est liée à la somme des valeurs propres.

173

174 Cependant, Cayley n'utilise pas encore systématiquement le mot "trace".

175 4. Usage allemand : Spur (fin XIX^e)

176

177 Le terme se stabilise vraiment dans la littérature allemande, notamment avec :

178

179 Frobenius

180

181 Weierstrass

182

183 Le mot utilisé est Spur, qui signifie littéralement :

184

185 trace, piste, empreinte (comme une trace dans la neige)

186

187 C'est exactement le même champ sémantique que le français trace.

188

189 🟡 L'idée est claire :

190

191 quand on change de base, toute la matrice change,

192 mais la somme des éléments diagonaux est la "trace" laissée par l'opérateur.

193

194 5. Adoption française et formalisation (fin XIX^e - début XX^e)

195

196 Les mathématiciens français (Jordan, Picard, Hadamard) traduisent directement Spur par trace.

197

198 À ce moment-là :

199

200 le calcul matriciel devient standard,

201

202 la trace est reconnue comme un invariant fondamental,

203

204 elle est liée à :

205

206 la somme des valeurs propres,

207

208 le coefficient de degré $n-1$ du polynôme caractéristique.

209

210 Le terme trace est alors définitivement fixé.

211 6. Extension fonctionnelle : trace d'opérateurs (XX^e siècle)

212

213 Avec :

214

215 Hilbert

216

217 von Neumann

218

219 Schatten

220

221 la trace est généralisée aux opérateurs sur des espaces de dimension infinie.

222

223 Pourquoi conserver le mot trace ?

224 Parce qu'on garde exactement l'idée originelle :

225

226 une empreinte globale laissée par un opérateur, obtenue en « sommant ses effets élémentaires ».

227

228 On parle alors de :

229

230 trace nucléaire,

231

232 trace de Fredholm,

233

234 trace dans les algèbres d'opérateurs.

235

236

237

238

239

240 Si tu veux, je peux aussi :

241

242 te montrer le tout premier texte où "Spur" est utilisé explicitement,

243

244 comparer la trace à d'autres invariants nommés à la même époque (déterminant, rang),

245

246 ou expliquer pourquoi trace a survécu alors que d'autres termes concurrents ont disparu.

247

248 -----

249

250 merci beaucoup

251 ChatGPT a dit :

252

253 Avec plaisir 😊

254 Ravi que ça t'ait été utile. N'hésite pas si tu as d'autres questions d'algèbre linéaire, d'histoire des maths ou même des curiosités de vocabulaire ma