



Fonction affine par morceaux

15 langues

[Article](#) [Discussion](#)

[Lire](#) [Modifier](#) [Modifier le code](#) [Voir l'historique](#)

 *Ne pas confondre avec la notion d'[application linéaire par morceaux](#) en géométrie.*

En [mathématiques](#), une **fonction affine par morceaux** est une fonction définie sur une réunion d'[intervalles réels](#) et dont la restriction à chacun de ces intervalles est donnée par une expression [affine](#). Sa [courbe représentative](#) est alors constituée de segments de droite (éventuellement privés de leurs extrémités) et de points isolés. Une telle fonction n'est en effet pas nécessairement [continue](#).

Les fonctions affines par morceaux permettent de représenter une suite de déplacements à vitesse constante le long d'un axe en fonction du temps, mais aussi certains signaux électriques comme le [signal carré](#) ou en dents de scie.

Plus généralement, ces fonctions présentent un intérêt majeur de se prêter facilement aux calculs tout en [approchant](#) n'importe quelle fonction continue. Elles sont donc très utiles en [analyse numérique](#), par exemple dans le [calcul numérique d'une intégrale](#). Mais elles sont aussi utilisées en pratique lorsqu'il n'existe pas de formulation simple valable sur tout le domaine de valeurs considéré, comme dans le mode de calcul de l'[impôt sur le revenu en France](#) à partir du [quotient familial](#).

Exemples [[modifier](#) | [modifier le code](#)]

La fonction [valeur absolue](#) est une fonction affine par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $|x| = -x$ si $x < 0$
- $|x| = x$ si $x \geq 0$

De même, la fonction définie par $f(x) = |x - 3| + 2|x + 5|$ est une fonction affine par morceaux ainsi que la fonction [partie entière](#) de x , non seulement affine par morceaux mais constante par morceaux.

On peut également citer la fonction [partie fractionnaire](#) et la [fonction de Heaviside](#) comme exemples de fonctions affines par morceaux.

Continuité [[modifier](#) | [modifier le code](#)]

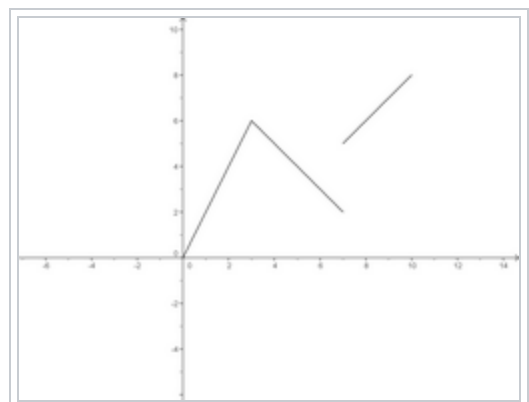
Un des problèmes posé par la construction d'une fonction affine par morceaux est la présence ou non de saut. Si les segments de droites sont jointifs, la représentation graphique forme une ligne polygonale. Une petite variation sur la variable entraîne une petite variation sur $f(x)$. C'est l'approche intuitive de ce que l'on appelle en mathématique la [continuité](#).

Exemple : la première fonction donnée était définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 3]; \\ 9 - x & \text{si } x \in [3; 7]; \\ x - 2 & \text{si } x \in [7; 10] \end{cases}$$

Elle est bien continue en 3 car, si x s'approche de 3 en restant inférieur à 3, alors la valeur de $f(x)$ s'approche de 6 ($= 2 \times 3$) et quand x s'approche de 3 par valeur supérieure la valeur de $f(x)$ s'approche de 6 ($= 9 - 3$).

En revanche, elle n'est pas continue en 7, car si x s'approche de 7 en restant inférieur à 7, alors $f(x)$ s'approche de 2, tandis que si x s'approche de 7 en restant supérieur à 7, alors $f(x)$ s'approche de 5.

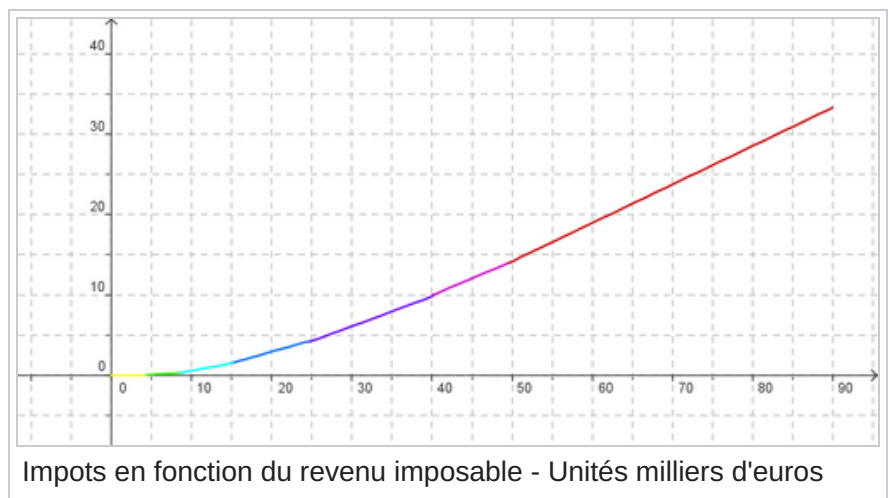


Courbe représentative de la fonction définie ci-contre.

Un exemple : la courbe d'imposition [\[modifier | modifier le code \]](#)

Cet exemple est tiré de l'[impôt sur le revenu des personnes physiques](#) en [France](#) en [2006](#) qui donne le montant de l'impôt en fonction du quotient familial (revenu annuel après déduction divisé par nombre de part). Pour simplifier, on prendra comme exemple un célibataire (nombre de part = 1). Si le revenu est R , alors l'impôt I est calculé par :

- si $R < 4412$ alors $I = 0$
- si $R \in [4412 ; 8677]$ alors $I = R \times 0,0683 - 301,84$
- si $R \in]8677 ; 15274]$ alors $I = R \times 0,1914 - 1369,48$
- si $R \in]15274 ; 24731]$ alors $I = R \times 0,2826 - 2762,47$
- si $R \in]24731 ; 40241]$ alors $I = R \times 0,3738 - 5017,93$
- si $R \in]40241 ; 49624]$ alors $I = R \times 0,4262 - 7126,56$
- si $R > 49624$ alors $I = R \times 0,4809 - 9841$



Ceci représente une fonction affine par morceaux. Changer de tranche, c'est changer de fonction affine. Le taux d'imposition y est plus élevé. Est-ce pour autant que le changement entraîne un saut significatif dans l'impôt ?

Un rapide calcul pour un revenu de 15273 et un revenu de 15275 euros (changement de tranche) donne, pour le premier cas, un impôt de 1553,77 euros et, dans le second cas, un impôt de 1554,25 euros soit moins de 48 centimes d'euros pour une augmentation de revenu de 2 euros. Il n'y a donc pas de saut, la fonction I est continue. On peut vérifier cette propriété pour le passage de chaque tranche. C'est l'objectif de la constante soustractive ajoutée dans chaque fonction affine. L'impression subjective de discontinuité provient du fait que le taux change brusquement : la pente de la droite change brusquement créant un point anguleux. On dit que la fonction n'est pas [dérivable](#).

Une deuxième idée couramment répandue est que le saut de tranche peut entraîner une perte de revenu réel. Si le revenu réel correspond au revenu après déduction auquel on ôte les impôts, on a $R' = R - I$ et R' reste en fait une fonction continue de R . C'est de nouveau une fonction affine par morceaux dont l'expression est :

- Si $R < 4412$ alors $R' = R$
- Si $R \in [4412 ; 8677]$ alors $R' = R \times 0,9317 + 301,84$
- Si $R \in]8677 ; 15274]$ alors $R' = R \times 0,8086 + 1369,48$
- Si $R \in]15274 ; 24731]$ alors $R' = R \times 0,7174 + 2762,47$
- Si $R \in]24731 ; 40241]$ alors $R' = R \times 0,6262 + 5017,93$
- Si $R \in]40241 ; 49624]$ alors $R' = R \times 0,5738 + 7126,56$
- Si $R > 49624$ alors $R' = R \times 0,5191 + 9841$

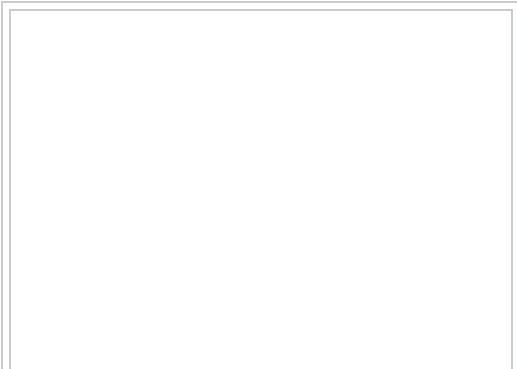
Les pentes de tous les segments de droites ou demi-droites sont positives et la fonction R' est continue donc elle est aussi une fonction croissante : plus on gagne d'argent, plus il en reste après impôts.

Approximation de fonction [[modifier](#) | [modifier le code](#)]

Cette section est vide, insuffisamment détaillée ou incomplète.
[Votre aide](#) est la bienvenue ! [Comment faire ?](#)

Une méthode courante utilisée pour les calculs numériques de fonctions (continues ou non) est de s'en donner une approximation affine par morceaux. C'est ce qui est à la base des calculs par la [méthode des éléments finis](#) d'ordre 1, et de la méthode de calcul intégral par la [méthode des trapèzes](#).

Pour approcher une fonction f sur un intervalle $[a , b]$ par une fonction affine par morceaux, on prend plusieurs points de l'intervalle $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, et de poser :



La [courbe représentative](#) d'une fonction (en bleu) et d'une approximation affine par morceaux de celle-ci (en rouge).

$$\forall i \in [0; n], \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \tilde{f}(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}x + \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}.$$

Articles connexes [[modifier](#) | [modifier le code](#)]

- [Application linéaire par morceaux](#)
- [Fonction affine](#)
- [Régularité par morceaux](#)

v · m	Mathématiques élémentaires Domaines des mathématiques Algèbre classique Algèbre classique	Algèbre classique · Arithmétique élémentaire · Analyse · Analyse réelle · Suites numériques · Géométrie classique · Logique · Probabilités · Statistiques · Symboles Addition · Multiplication · Division · Ordre des opérations · Table d'addition · Table de multiplication · Associativité · Commutativité · Distributivité · Transitivité · Proportionnalité · [masquer]
------------------	--	--

	Pourcentage · Règle de trois · Fraction · Équation du premier degré · Équation du second degré · Système d'équations linéaires
Géométrie classique	Coordonnées cartésiennes · Géométrie du triangle · Homothétie · Quadrilatère · Repère affine · Rotation plane · Similitude · Théorème de Pythagore · Théorème de Thalès · Théorème de Thalès (cercle) · Théorème des milieux · Théorème d'Al-Kashi · Translation
Arithmétique	Multiple · Diviseur · Division euclidienne · Nombre premier · Congruence sur les entiers · PGCD de nombres entiers · Plus petit commun multiple · Critère de divisibilité · Preuve par neuf
Suites et fonctions	Fonction de référence · Fonction affine · Fonction du second degré · Fonction puissance · Fonction trigonométrique · Fonction logarithme · Fonction exponentielle · Suite arithmétique · Suite géométrique · Limite · Dérivation · Opérations sur les limites · Dérivées usuelles · Opérations sur les dérivées · Liste de fonctions numériques · Fonction élémentaire
Logique	Axiome · Démonstration · Contre-exemple · Difficulté mathématique
Statistiques et probabilités	Critères de position · Critères de dispersion · Série statistique à deux variables · Arbre de probabilité · Variables aléatoires élémentaires

Portail de l'analyse

Catégories :
Analyse réelle
Analyse fonctionnelle
Propriété de fonction
[+]

La dernière modification de cette page a été faite le 10 juin 2025 à 14:51. La page a été rendue avec [Parsoid](#).

Droit d'auteur : les textes sont disponibles sous [licence Creative Commons attribution, partage dans les mêmes conditions](#) ; d'autres conditions peuvent s'appliquer. Voyez les [conditions d'utilisation](#) pour plus de détails, ainsi que les [crédits graphiques](#). En cas de réutilisation des textes de cette page, voyez [comment citer les auteurs et mentionner la licence](#).

Wikipedia® est une marque déposée de la [Wikimedia Foundation, Inc.](#), organisation de bienfaisance régie par le paragraphe [501\(c\)\(3\)](#) du code fiscal des États-Unis.

Politique de confidentialité
À propos de Wikipédia
Avertissements
Contact
Contacts juridiques & sécurité
Code de conduite

Développeurs
Statistiques
Déclaration sur les témoins (cookies)
Version mobile

